

POSTAĆ KANONICZNA I OGÓLNA FUNKCJI KWADRATOWEJ

| Funkcja kwadratowa | |
|--|---------------------|
| Postać kanoniczna | Postać ogólna |
| $y = a(x - p)^2 + q$ | $y = ax^2 + bx + c$ |
| (p, q) wierzchołek paraboli, $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$ | |

Aby przejść z postaci ogólnej do postaci kanonicznej, można postąpić w sposób przedstawiony w poniższym przykładzie.

Przechodząc z postaci ogólnej funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej potrzebujemy mieć dane:

- współczynnik a – możemy go odczytać z postaci ogólnej funkcji kwadratowej
- współrzędne p i q wierzchołka paraboli – musimy je wyznaczyć

PRZYKŁAD 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli $y = -x^2 + 6x - 5$. Przedstaw równanie paraboli w postaci kanonicznej. Narysuj tę parabolę.

Zacniemy od wyznaczenia wierzchołka (p, q) paraboli.

Współczynniki: $a = -1$, $b = 6$, $c = -5$, zatem:

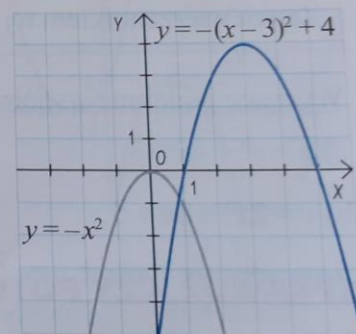
$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{-4} = 4$$

Równanie paraboli zapisujemy w postaci kanonicznej: $y = -(x - 3)^2 + 4$.

Szukaną parabolę otrzymamy, przesuając parabolę $y = -x^2$ o 3 jednostki w prawo i 4 w górę.



Cwiczenie 1.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli. Przedstaw jej równanie w postaci kanonicznej.

a) $y = 3x^3 - 18x + 23$

Rozwiązanie

Dana jest postać ogólna: $y = 3x^2 - 18x + 23$

Mamy zapisać postać kanoniczną czyli:

$$y = a(x - p)^2 + q$$

Odczytujemy z postaci ogólnej współczynnik a : $a = 3$

Musimy teraz wyznaczyć współrzędne wierzchołka (p, q) . Odczytajmy od razu z postaci ogólnej współczynniki b oraz c :

$$b = -18$$

$$c = 23$$

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-18}{2 \cdot 3} = -\frac{-18}{6} = -(-3) = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 23 = 324 - 276 = 48$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{48}{4 \cdot 3} = -\frac{48}{12} = -4$$

Teraz możemy przejść do zapisania postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$

Czyli w miejsce a, p, q wstawiamy obliczone liczby.

Otrzymujemy:

$$y = 3(x - 3)^2 + (-4) = 3(x - 3)^2 - 4$$

Ćwiczenie 2.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, a następnie przedstaw wzór funkcji w postaci kanonicznej. Naszkicuj parabolę.

$$y = 2x^2 + 4x + 2$$

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$c = 2$$

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -\frac{4}{4} = -1$$

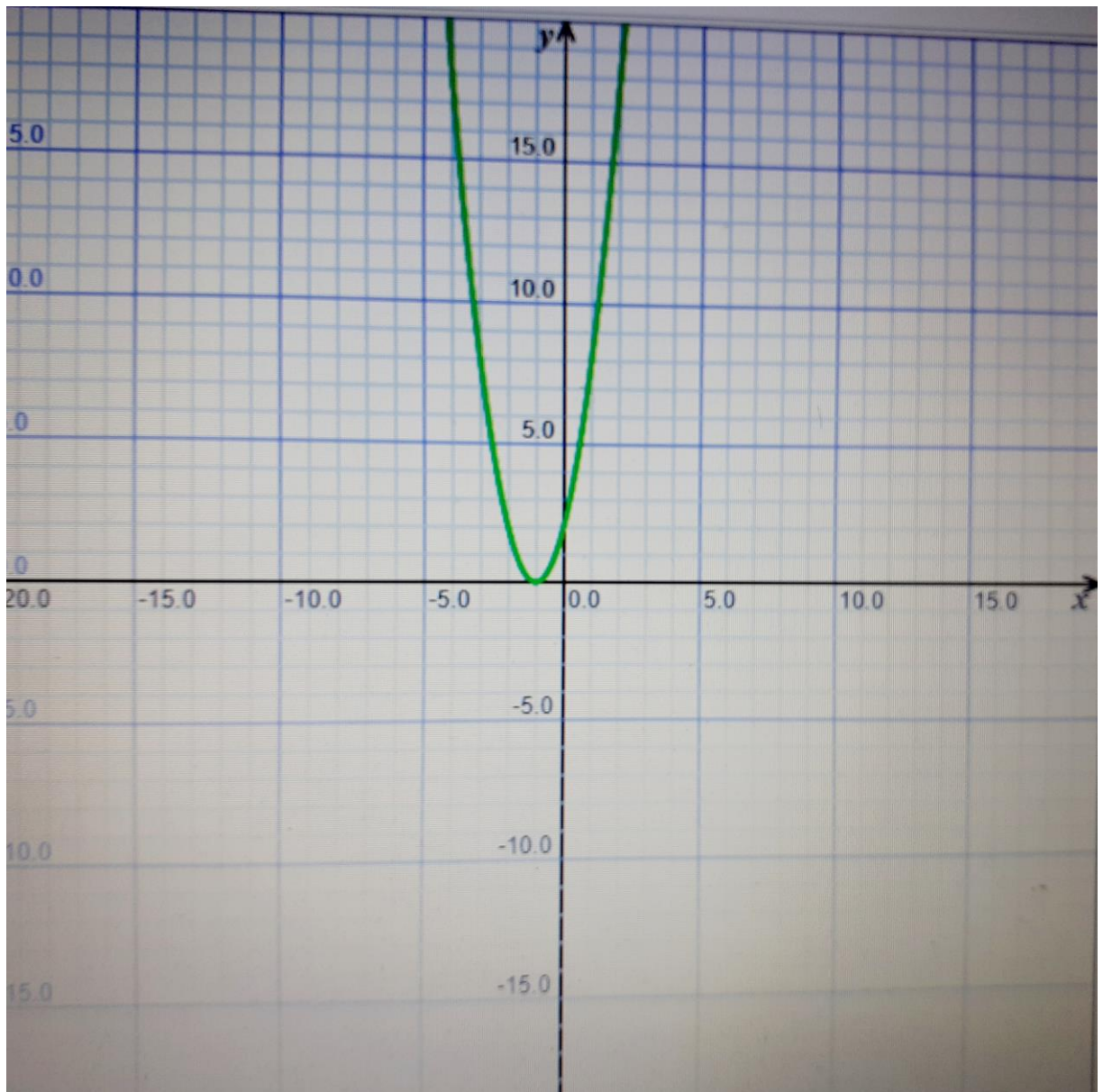
$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{0}{4 \cdot 2} = 0$$

Teraz możemy przejść do zapisania postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$

$$y = 2(x - (-1))^2 + 0 = 2(x + 1)^2$$

Wykres powyższej funkcji:



Praca samodzielna:

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, a następnie przedstaw wzór funkcji w postaci kanonicznej. Naszkicuj parabolę.

a) dla wszystkich uczniów: $y = x^2 + 4x + 1$

b) dla uczniów chętnych: $y = -x^2 + 2x - 3$

POWODZENIA 😊