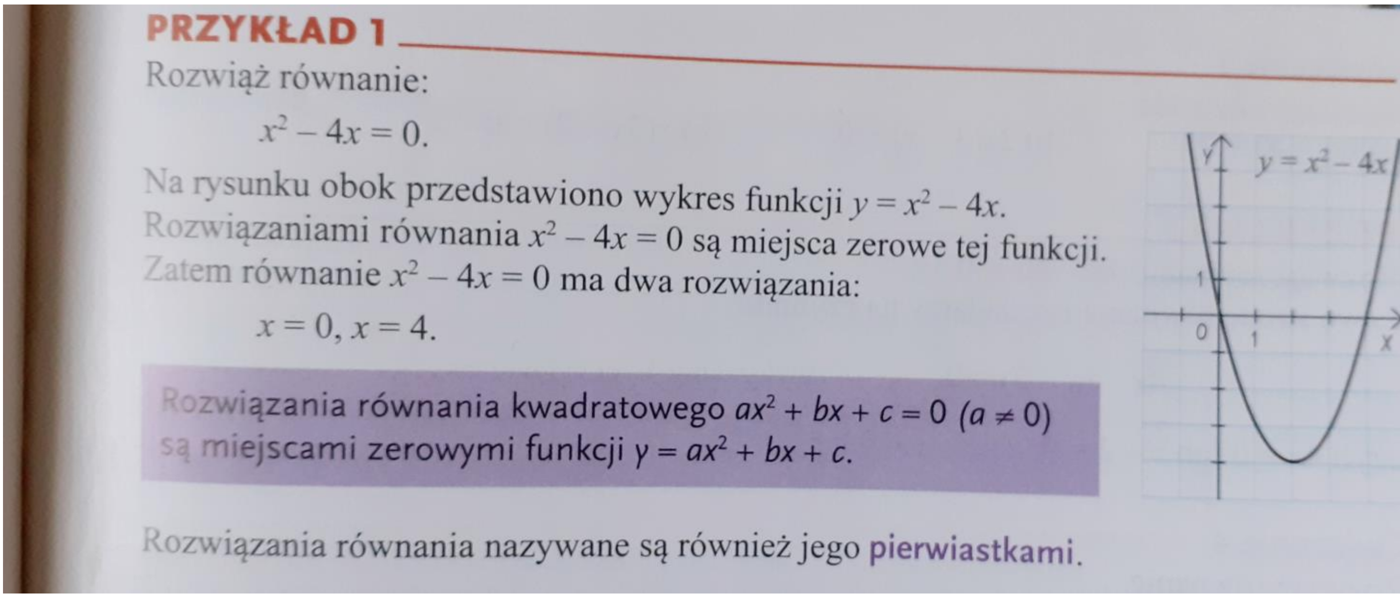
RÓWNANIA KWADRATOWE – CZĘŚĆ PIERWSZA

Na początek przypomnijmy sobie co to jest miejsce zerowe funkcji.

Miejscem zerowym funkcji *nazywamy taką liczbę x będącą argumentem funkcji, dla której wartość funkcji wynosi „O” (zero).*
Podczas obliczeń miejsce zerowe znajdujesz przez wstawienie do wzoru w miejsce „y” wartości „0”. Wówczas to otrzymujesz zazwyczaj prostą równość, po której obliczeniu otrzymujesz x=”liczba”, gdzie „liczba” jest miejscem zerowym funkcji, a punkt o współrzędnych („liczba”,0) wyznacza Ci współrzędne miejsca zerowego funkcji.

Graficznie miejsce zerowe jest to punkt przecięcia się wykresu funkcji z poziomą osią X.

Przyjrzyjmy się zatem poniższemu przykładowi:



PRZYKŁAD 1

Rozwiąż równanie:

$$x^2 - 4x = 0.$$

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = x^2 - 4x$.
Rozwiązaniami równania $x^2 - 4x = 0$ są miejsca zerowe tej funkcji.
Zatem równanie $x^2 - 4x = 0$ ma dwa rozwiązania:

$$x = 0,\ x = 4.$$

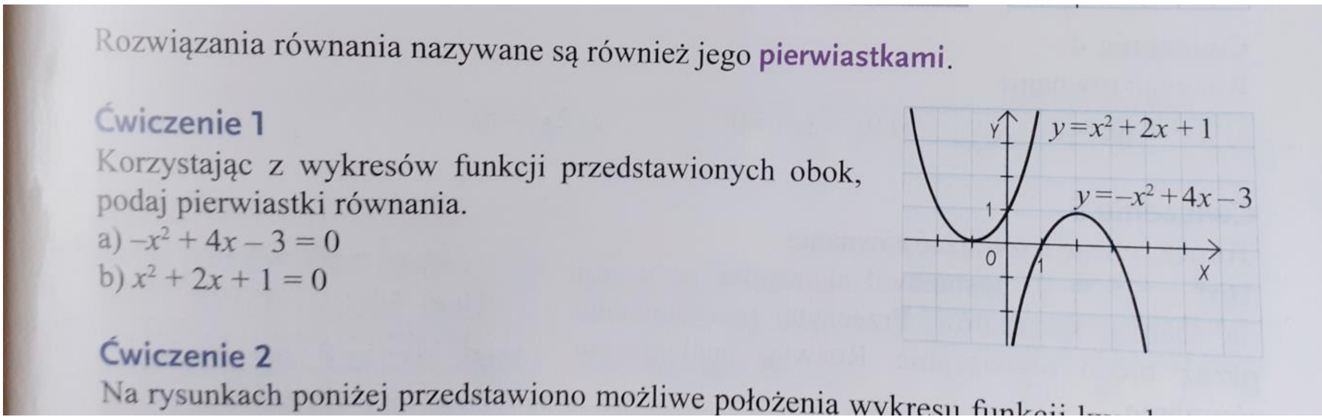
Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ są miejscami zerowymi funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

Rozwiązania równania nazywane są również jego **pierwiastkami**.

Zwróćmy uwagę w jakich punktach wykres przecina się z osią X (czyli z osią poziomą).

Widać, że są to punkty o współrzędnych: (0,0) oraz (4,0). Pierwsze współrzędne tych punktów to „x”. Możemy zatem powiedzieć, że $x = 0$ oraz $x = 4$ to miejsca zerowe funkcji $y = x^2 - 4x$ i jednocześnie rozwiązania (pierwiastki) równania $0 = x^2 - 4x$.

Teraz przejdziemy do ćwiczenia:



Rozwiązania równania nazywane są również jego **pierwiastkami**.

Ćwiczenie 1

Korzystając z wykresów funkcji przedstawionych obok, podaj pierwiastki równania.

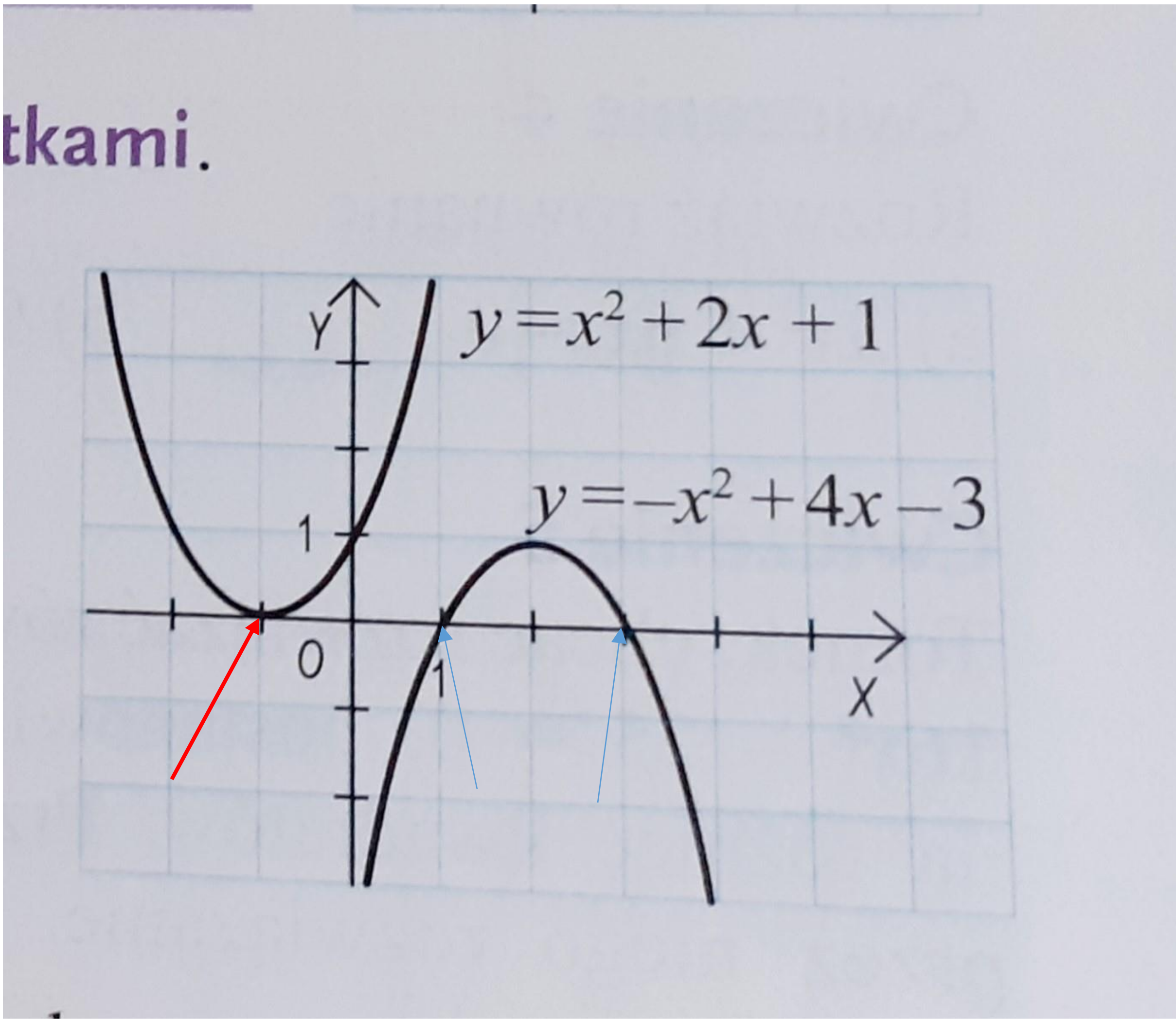
a) $-x^2 + 4x - 3 = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Ćwiczenie 2

Na rysunkach poniżej przedstawiono możliwe położenia wykresu funkcji

Tutaj powiększony wykres:



a) $-x^2 + 4x - 3 = 0$

Spójrzmy na wykres tej funkcji. Niebieskie strzałki wskazują punkty przecięcia wykresu z osią X.

Są to punkty (1,0) oraz (3,0). Patrzymy na pierwsze współrzędne tych punktów czyli: $x = 1$ oraz $x = 3$. Są to miejsca zerowe będące zarazem rozwiązaniami równania $-x^2 + 4x - 3 = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Czerwona strzałka wskazuje punkt przecięcia wykresu funkcji z osią X. Jest to punkt o współrzędnych (-1,0). Zatem $x = -1$ jest miejscem zerowym tej funkcji i jednocześnie rozwiązaniem równania $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Rozwiązując równania, często będziemy korzystać z podanej niżej własności liczb:

Dla dowolnych liczb a i b iloczyn $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż równanie $x(x+6) = 0$.

Ponieważ $x \cdot (x+6) = 0$, więc $x = 0$ lub $x + 6 = 0$.

Równanie spełniają liczby $x = 0$, $x = -6$.

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 8x = 0$.

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki:

$$4x \cdot (x-2) = 0,$$

Wyłączamy $4x$ przed nawias.

czyli $4x = 0$ lub $x - 2 = 0$, zatem $x = 0$ lub $x = 2$.

PRZYKŁAD 4

Chcąc rozwiązać równanie $4x^2 - 9 = 0$, możemy rozłożyć jego lewą stronę na czynniki (korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów) lub postąpić następująco:

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$4x^2 = 9 \quad |:4$$

Wówczas $x^2 = \frac{9}{4}$.

Są dwie liczby, których kwadrat jest równy $\frac{9}{4}$.

Stąd $x = \frac{3}{2}$ lub $x = -\frac{3}{2}$.

Zadanie

Rozwiąż równanie:

a) $3x^2 - 9 = 0$ → obowiązkowo dla wszystkich uczniów do pracy samodzielnej
b) $25 - 9x^2 = 0$ → rozwiązanie poniżej
c) $x(x+4) = 0$ → dla chętnych uczniów do pracy samodzielnej
d) $2x^2 + 47x = 0$ → rozwiązanie poniżej

$\mathbf{b)\ 25 - 9x^2 = 0}$

$25 = 9x^2$ |:9

$\frac{25}{9} = x^2$ |:√

Zatem $x = \frac{5}{3}$ lub $x = -\frac{5}{3}$ (ponieważ obie te liczby po podniesieniu do kwadratu dają $\frac{25}{9}$)

$\mathbf{d)\ 2x^2 + 47x = 0}$

$x \cdot (2x + 47) = 0$

Zatem $x = 0$ lub $2x + 47 = 0$

$2x + 47 = 0$

$2x = -47$ |: 2

$x = -\frac{47}{2} = -23{,}5$

Ostatecznie $x = 0$ lub $x = -23{,}5$.

TERMIN ROZWIĄZANIA POWYŻSZYCH PRZYKŁADÓW: DO 30 KWIETNIA 2020 R.