

ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ

METODĄ PRZECIWNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW

Przykład 1

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 8 \\ x + 2y = 12 \end{array} \right. \\ \hline 2x \quad = 20 \quad /:2 \end{array}$$

$$x = 10$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ x - 2y = 8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ 10 - 2y = 8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ -2y = 8 - 10 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ -2y = -2 \end{array} \right. \quad /: (-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

Zwróć uwagę, że współczynniki przy niewiadomej y są liczbami przeciwnymi -2 i 2 .

Dodajemy równania stronami, tzn. osobno dodajemy lewą stronę pierwszego równania do lewej strony drugiego:

$$x + x = 2x, \quad -2y + 2y = 0.$$

Podobnie prawe strony równań:

$$8 + 12 = 20.$$

Następnie rozwiązujemy otrzymane równanie z jedną niewiadomą.

Dołączamy drugie równanie dowolnie wybrane z układu, tworząc ponownie układ równań.

Do równania $x - 2y = 8$ podstawiam w miejsce x liczbę 10 i rozwiązuję to równanie.

Para liczb $x = 10$ i $y = 1$ jest rozwiązaniem tego układu.

SPRAWDZENIE:

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

Podstawiam do obu równań w miejsce x liczbę 10, a w miejsce y liczbę 1.

$$\begin{cases} 10 - 2 \cdot 1 \stackrel{?}{=} 8 \\ 10 + 2 \cdot 1 \stackrel{?}{=} 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 - 2 = 8 \\ 10 + 2 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 = 8 \\ 12 = 12 \end{cases}$$

Obie równości są prawdziwe, a zatem para liczb $(10, 1)$ jest rozwiązaniem układu.

Jak postępujemy przy rozwiązywaniu układów równań metodą przeciwnych współczynników:

- 1) Równania przekształcamy tak, aby współczynniki przy tej samej niewiadomej były liczbami przeciwnymi.
- 2) Dodajemy lewe i prawe strony równań układu (otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą).
- 3) Rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą.
- 4) Tworzymy ponownie układ równań, dopisując jako drugie równanie, **dowolnie wybrane równanie układu**.
- 5) Teraz, stosując metodę podstawiania, rozwiązujemy równanie.
- 6) Podajemy rozwiązanie układu.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y = 8 \\ -5x + y = -9 \end{array} \right. \\ \hline -y = -1 \quad / \cdot (-1) \\ y = 1 \end{array}$$

Przy niewiadomej x są liczby przeciwne dodajemy równania stronami:
lewe strony $5x + (-5x) = 0$, $-2y + y = -1y = -y$
prawe strony: $8 + (-9) = -1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ 5x - 2y = 8 \end{array} \right.$$

Tworzymy ponownie układ równań, dopisując jako drugie równanie, dowolnie wybrane równanie układu.
Teraz do II równania w miejsce y podstawiam liczbę 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ 5x - 2 \cdot 1 = 8 \end{array} \right.$$

Rozwiązuję II równanie.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ 5x - 2 = 8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ 5x = 8 + 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ 5x = 10 \quad /: 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb $(2, 1)$.

SPRAWDZENIE:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ -5x + y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \stackrel{?}{=} 8 \\ -5 \cdot 2 + 1 \stackrel{?}{=} -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 - 2 = 8 \\ -10 + 1 = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 = 8 \\ -9 = -9 \end{cases}$$

Do obu równań w miejsce x podstawiam liczbę 2, a w miejsce y liczbę 1. Sprawdzam, czy zachodzą równości.

Obie równości są prawdziwe, zatem para liczb $x = 2$ i $y = 1$ jest rozwiązaniem tego układu.

Przykład 3

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & / \cdot 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 2x - 2 \cdot y = 2 \cdot 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\underline{5x = 15} \quad /: 5$$

$$x = 3$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 3 + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2y = 7 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2y = 4 & /: 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

W praktyce rzadko zdarza się, aby współczynniki przy tej samej niewiadomej były liczbami przeciwnymi.

Do takiej sytuacji można dosyć łatwo doprowadzić. W tym celu obie strony I równania mnożymy przez 2.

Przy niewiadomej y są liczby, przeciwne, możemy dodawać stronami.

Rozwiązuję otrzymane równanie.

Do równania $x = 3$ dopisuję drugie dowolnie wybrane równanie układu np. $x + 2y = 7$.

Do II równania w miejsce x podstawiam liczbę 3 i rozwiązuję otrzymane równanie.

Para liczb (3, 2) jest rozwiązaniem tego układu.

SPRAWDZENIE:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Do obu równań podstawiam w miejsce x liczbę 3, a w miejsce y liczbę 2. Sprawdzam czy zachodzą równości.

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 2 \stackrel{?}{=} 4 \\ 3 + 2 \cdot 2 \stackrel{?}{=} 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - 2 = 4 \\ 3 + 4 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 4 \\ 7 = 7 \end{cases}$$

Otrzymałam równości prawdziwe, a zatem para liczb $x = 3$ i $y = 2$ jest rozwiązaniem układu.

Praca samodzielna w domu: Zadanie

Rozwiąż układy równań metodą przeciwnych współczynników:

a)
$$\begin{cases} x + 4y = 1 \\ x - 8y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3(x - 1) + 2(2 - y) = -5 - y \\ x + y = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 8x = 4y - 40 \\ 2x = 3y - 18 \end{cases}$$

Zadanie 1a) obowiązkowe dla wszystkich. Zadanie 1b) i c) dla chętnych.